Logique

Pourquoi une fiche sur la logique ?

La logique est une notion transversale, qui se retrouve dans tous les raisonnements, qu'ils soient philosophiques, scientifiques, littéraires... Maitriser des bases de logique formelle (c'est-à-dire de logique pure) permet, dans le domaine des sciences qui nous intéresse, de mieux comprendre le résultats d'expérience. C'est grâce à la logique que l'on sait précisément ce qu'on peut tirer d'une expérience, de façon à en tirer le maximum de connaissances, ni trop, ni trop peu.

Evénements

La logique décrit les rapports qui existent entre des événements; et pour la logique, tout peut être un événement. Ainsi, on peut considérer comme événements *le glaçon fond*, *la roue rouge fait 2 tours*, *il fait chaud*, *la figure a 4 cotés égaux*, *la figure a 4 angles droits* ou *il pleut* . Traditionnellement, pour aller plus vite, on note ces événements par des lettres. Par exemple, on peut décider que A veut dire *le glaçon fond* , B veut dire *la roue rouge fait 2 tours* etc... Pour relier ces évènements ensemble, on utilise des opérateurs logiques, tout comme on utilise des opérateurs arithmétiques (l'addition, la multiplication...) pour relier des nombres. Les opérateurs présentés ici sont: l'implication ($\Rightarrow$), l'équivalence ($\Leftrightarrow$), le et ($\wedge$), le ou ($\vee$) et le non ($\neg$).

Implications et équivalences.

Un des outils les plus importants en logique est la notion d'implication. Elle traduit le fait qu'un événement en entraine un autre: s'il se passe l'événement A, alors il se passe forcément l'événement B. On dit que l'événement A implique l'événement B, et on note $A \Rightarrow B$.

- *S'il pleut, alors je prend mon parapluie: "‘il pleut"’* $\Rightarrow$ *"‘je prend mon parapluie"’*
- *A la première personne du pluriel, le verbe se termine en -ons: "‘Le pronom nous"’* $\Rightarrow$ *"‘la terminaison -ons"’*
- *S'il fait chaud, alors le glaçon fond: "‘il fait chaud"’* $\Rightarrow$ *"‘le glaçon fond"’*
- *Si la roue rouge fait deux tours, alors la roue bleue fait un tour: "‘la rouge fait deux tours"’* $\Rightarrow$ *"‘la bleue fait un tour"’*

L'implication n'est pas toujours réciproque: si je prend mon parapluie, ça ne veut pas forcément dire qu'il pleut. Il peut être en train de neiger par exemple. Si l'implication marche dans les deux sens, on parle d'équivalence. Dans ce cas, les deux évènements sont forcément reliés: l'un ne peux exister sans l'autre. Autrement dit, il se passe A si, et seulement si, il se passe B. On dit que les évènements A et B sont équivalents, et on note $A \Leftrightarrow B$

- *Si la roue bleue fait un tour, alors la rouge en fait deux: "‘la bleue fait un tour"’* $\Rightarrow$ *"‘la rouge fait deux tours"’. Comme on a aussi "‘la rouge fait deux tours"’* $\Rightarrow$ *"‘la bleue fait un tour"’, on a "‘la rouge fait un tour"’* $\Leftrightarrow$ *"‘la bleue fait deux tours"*
- *Si le glaçon fond, ça ne veut pas forcément dire qu'il fait chaud: le changement d'état peut être causé par une augmentation de pression. On a donc "‘il fait chaud"’* $\Rightarrow$ *"‘le glaçon fond"’, mais pas "‘le glaçon fond"’*$\Rightarrow$*"‘il fait chaud"’ donc on n'a pas "‘le glaçon fond"’*$\Leftrightarrow$*"‘il fait chaud"’*

Et/Ou, conditions nécessaires et suffisantes.

On peut affiner un peu notre description des évènements à l'aide des notions de "'et"'(noté $\wedge$) et de "'ou"' (noté $\vee$). On commence ainsi à combiner les éléments entre eux.

- *Si une figure a 4 cotés et 4 angles droits, alors c'est un rectangle: (4 cotés $\wedge$ 4 angles droits) $\Rightarrow$ rectangle*
- *Si il fait chaud ou que la pression est élevée, alors le glaçon fond: (chaud $\vee$ pression) $\Rightarrow$ le glaçon fond*
- *On en déduit que: (chaud $\vee$ pression) $\Leftrightarrow$ le glaçon fond*

Dans le cas $(A \wedge B) \Rightarrow C$ [(A et B) implique C], il faut nécessairement qu'il se passe à la fois A et B pour que C se réalise. On dit que A (ainsi que B) est condition nécessaire pour C.

Dans le cas $(A \vee B) \Rightarrow C$ [(A ou B) implique C], il suffit qu'il se passe soit A, soit B pour que C se réalise. On dit que A (ainsi que B) est condition suffisante pour C.

Négation

Pour tout événement, il existe un contraire: on note $\neg A$ l'événement contraire de A (non A). Par exemple, le contraire de "'il pleut"' est "'il ne pleut pas"', qu'on peut noter $\neg$*il pleut*.

Pour exprimer l'inverse d'un événement, on peut utiliser les règles suivantes:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

- *L'inverse de "'la figure est un carré"' $\Leftrightarrow$ "'la figure a 4 côtés égaux et 4 angles droits"' est "'soit la figure n'a pas 4 côtés égaux, soit elle n'a pas 4 angles droits"' $\Leftrightarrow$ "'la figure n'est pas un carré"'*
- *L'inverse de "'le glaçon fond"' $\Leftrightarrow$ "'Il fait chaud ou est la pression est basse"' est "'Il fait froid et la pression est élevée"' $\Leftrightarrow$ "'le glaçon ne fond pas"'*
- *Si il y a la fois du Soleil et de la pluie, il se forme un arc en ciel ((pluie$\wedge$Soleil)$\Rightarrow$Arc en ciel). Donc s'il n'y a pas d'arc en ciel, c'est qu'il n'y a pas de la pluie et du Soleil, c'est à dire pas de pluie ou pas de Soleil ($\neg$Arc en ciel$\Rightarrow$ ($\neg$pluie $\vee$ $\neg$ Soleil)*

Applications expérimentales

Ces règles permettent de comprendre comment exploiter les expériences:

Avec une expérience, on montre des implications.

Si une expérience A donne un résultat B, A et B sont reliés par une implication. On ne peut jamais tirer une équivalence d'une seule expérience: il faut en faire deux pour montrer une double implication (A $\Rightarrow$ B et B $\Rightarrow$ A).

- *On place un glaçon sur le radiateur, on constate qu'il fond. On en déduit que (mise sur le radiateur)$\Rightarrow$(fonte), mais on ne peut rien dire sur la réciproque (qui est d'ailleur fausse: un glaçon peut fondre sans être sur un radiateur !)*

Il ne faut changer qu'un paramètre à la fois.

Si on change deux paramètres à la fois, on ne peut pas savoir si l'effet est produit par l'un, l'autre ou la combinaison des deux. Si $(A \wedge B) \Rightarrow C$, on ne peut pas savoir si c'est A, B ou seulement (A$\wedge$B) qui entraine C.

- *On place un glaçon dans une assiette rouge sur une table et un glaçon dans une assiette bleue sur le radiateur; le second fond plus vite. Il n'y a aucune moyen de savoir si la rapidité de la fonte est entrainée par (mise sur le radiateur), (assiette bleue) ou (assiette bleue sur radiateur)*
- *On lance avec la même vitesse deux pendules, avec des masses et des longueurs de fils différentes. L'un va plus vite que l'autre, mais on ne peut pas attribuer ce résultat à l'une ou l'autre des caractérisitiques.*